Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (uneigentliche Integrale und Grenzwerte haben in dieser Aufgabe im Falle der Existenz immer einen endlichen Wert).

Für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

a) Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

b) Wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$.

c) Wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei beliebige Funktionen. Dann gilt:

a) Ist f stetig, dann ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int\limits_{0}^{g(x)} f(t)dt$, ebenfalls stetig.

b) Ist f stetig und ist g differenzierbar, dann ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int\limits_{0}^{g(x)} f(t)dt$, ebenfalls differenzierbar.

c) Ist f beschränkt und differenzierbar und existiert $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ im eigentlichen Sinne (d.h. dieser Grenzwert existiert und hat einen endlichen Wert), dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Wie üblich identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$. Sei

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{z^4}\right), & \text{wenn } z \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } z = 0\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist und dass f in $(0, 0)$ die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass f in $z = 0$ *nicht* komplex differenzierbar ist. Begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Ergebnis von Teil a) steht.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

a) Geben Sie eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, die folgende Lösungen besitzt:

$$\begin{aligned} y_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2\exp(3x) + \sin(3x) \\ y_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3\exp(-2x) + \sin(3x) \\ y_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-2x) + 5\exp(3x) + \sin(3x) \end{aligned}$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y(x) = \sin(ax) + a\cos(x)$$

mindestens eine unbeschränkte Lösung?

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad \text{und} \quad y(0) = 0\,. \qquad (*)$$

a) Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen von $(*)$. Ein expliziter Nachweis, dass es keine weiteren Lösungen gibt, ist nicht erforderlich.

b) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}$, so dass es eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung von $(*)$ gibt, welche neben $y(0) = 0$ auch $y(1) = b$ erfüllt.