Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ seien

$$f_n, g_n \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := x^n e^{-nx}, \qquad g_n(x) := x^n e^{-x^n}.$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Untersuchen Sie, ob die Funktionen f_n und g_n auf $[0, \infty[$ Maximum und Minimum annehmen.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ punktweise konvergieren. Bestimmen Sie die jeweilige Grenzfunktion f bzw. g.

(c) Welche der Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren auf $[0, \infty[$ gleichmäßig?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derart, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \qquad (*)$$

die Erhaltungsgrößen

$$V,\ W \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad V(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad W(x) := x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$$

besitzt. Zeigen Sie:

(a) Alle maximalen Lösungen von $(*)$ existieren auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) $\bar{x} := 0$ ist eine stabile, stationäre Lösung von $(*)$.

(c) Für jede Lösung $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von $(*)$ ist $t \mapsto x_3(t)$ konstant.

(d) Es gibt ein Vektorfeld f mit den obigen Eigenschaften, für welches zusätzlich die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = (1, 0, 0)$ periodisch und nicht konstant ist.

(1+1+2+2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := \left(|x_2|^{1/2}, |x_1|^{1/2}\right)$, und $D :=]0,\infty[^2$. Zeigen Sie:

(a) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist für jedes $x_0 \in D$ lokal eindeutig lösbar.

(b) Es gibt genau eine Lösung $x\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ mit $x(t) \in D$ für alle $t > 0$.
(Hinweis: Die Trajektorie einer solchen Lösung ist der Graph einer Funktion, welche wieder eine Differentialgleichung erfüllt.)

(c) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar.

(1+4+1 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 1 \text{ und } \forall z \in D: \ f'(z) = (f(z))^2 .$$

(b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $g = u + iv\colon D \to \mathbb{C}$, u und v reellwertig, mit

$$u(0) = v(0) = 0 \text{ und } \forall z \in D: \ \sin u(z) + i\,v(z)\,\cos v(z) = 0.$$

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}$ auf U,

(ii) f ist auf $\{x \in U \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ unbeschränkt,
und auf $\{x \in U \mid |x_1| \leq 1, \ x_2 = 0\}$ beschränkt.

Zeigen Sie, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

(6 Punkte)