Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: (2+4 Punkte)

(a) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, welche in den Punkten -1 und 1 wesentliche Singularitäten mit den Residuen

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = -1, \quad \mathrm{Res}_{1}(f) = 1$$

besitzt. Ist f durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt?

(b) Sei f die in (a) gefundene Funktion. Für $\alpha \in [0, \infty[$ sei γ_α der geschlossene Weg, der die Punkte

$$2 + \alpha i, \ -2 - i, \ -2 + i, \ 2 - \alpha i, \ 2 + \alpha i$$

in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet. Für welche Werte von α ist das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} f(z)\, dz$$

definiert? Berechnen Sie das Integral für diese Werte von α.

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen n

$$\sum_{k=1}^{n} (4k^3 - 6k^2) = n^4 - 2n^2 - n.$$

(b) Zeigen Sie durch Induktion in n, dass für $G_r(k) := \prod_{\ell=0}^{r-1}(k + \ell)$ (also mit $G_0(k) = 1$) die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} G_r(k) = \frac{1}{r+1} G_{r+1}(n)$$

gelten, für alle $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3: (2+4 Punkte)
Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := \big((1-|x|)^{-1}, |x|\big)$.
Zeigen Sie:

(a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \; x(0) = 0$$

besitzt eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung.

(b) Für diese maximale Lösung $x\colon]a,b[\to D$, wobei $-\infty \le a < 0 < b \le \infty$, ist $b \le 1$, $x(b) := \lim_{t \to b} x(t)$ existiert, und $|x(b)| = 1$, $0 < x_2(b) < 1/4$.
Hinweis: Die Trajektorie der Lösung lässt sich als Graph einer Funktion darstellen und deren Ableitung lässt sich geeignet abschätzen.

Aufgabe 4: (4+2 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für jede Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

genau eine der folgenden Aussagen zutrifft:

(i) x ist streng monoton wachsend.
(ii) x ist streng monoton fallend.
(iii) x ist konstant.

(b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur als stetig vorausgesetzt wird?

Aufgabe 5: (3+3 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\infty[$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, und bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx.$$

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\,dx.$$