Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie die asymptotische Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ der in $\mathbb{R}^2$ gegebenen Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x^3 + y^5, \ \dot{y} = -xy^4 - y^3.$$

Führt Linearisierung zum Ziel?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätseigenschaften der Ruhelage $(0, 0)$.

(b) Skizzieren Sie das Phasenporträt.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\cos x.$$

(a) Wandeln Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung mit den Variablen x und y um.

(b) Hat diese Differentialgleichung für jede Anfangsbedingung eine eindeutige maximale Lösung?

(c) Sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

(d) Man zeige, dass die Funktion $S(x,y) = 2\sin x + y^2$ ein erstes Integral ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die bei Annäherung an ∂G gegen ∞ strebt (d.h. für jede Folge (z_n) in G mit $z_n \to z \in \partial G$ gilt $|f(z_n)| \to \infty$).
Zeigen Sie, dass f nicht holomorph ist, indem Sie die folgenden drei Fälle unterscheiden:

(i) f hat keine Nullstelle in G.

(ii) f hat endlich viele Nullstellen in G.

(iii) f hat unendlich viele Nullstellen in G.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Berechnen Sie unter Benutzung von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ für $\lambda > 0$ das Integral

$$\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(\lambda x)\,dx.$$

Hinweis: Wenden Sie für reelles $R > 0$ den Cauchy–Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm R$, $\pm R + i\lambda/2$ an und betrachten Sie $R \to \infty$.

(6 Punkte)