

Thema Nr. 2  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten. Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:

- a) Für welche  $a, b \in \mathbb{R}$  ist das Polynom  $u(x, y) = x^2 + 2axy + by^2$  der Realteil einer holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$ ? (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie für jedes solche Paar  $(a, b)$  den Imaginärteil aller zugehörigen holomorphen Funktionen. (3 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  die Kurve mit  $\gamma(t) = e^{-it}$ . Weiterhin bezeichne  $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ . Zeigen Sie, dass für alle  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| > 1$  gilt:

$$P_n(w) = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz.$$

(6 Punkte)

Hinweis: Man schreibe den im Integranden auftretenden Faktor  $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w[1-(z/w)]}$  und verwende dann die geometrische Reihe.

Aufgabe 3:

Sei  $L \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + Ly(x) = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (1)$$

- a) Zeigen Sie mittels Potenzreihenansatz  $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ , dass (1) eine Lösung  $y: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt. (5 Punkte)
- b) Ist die Lösung aus (a) auf  $] -1, 1[$  eindeutig bestimmt? (1 Punkt)

Hinweis zu a): Bestimmen Sie zunächst durch formale Differentiation der Potenzreihe die Koeffizienten  $c_j$ . Untersuchen Sie dann den Konvergenzradius der so definierten Potenzreihe. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die formale Differentiation nun gerechtfertigt?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

- a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -u' - \frac{5}{2}u.$$

(2 Punkte)

- b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$xy''(x) + \frac{1 + \sqrt{x}}{2} y'(x) + \frac{5}{8} y(x) = 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Durch die Substitution  $y(t^2) = u(t)$  ( $t > 0$ ) geht die Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung an.

(4 Punkte)

Aufgabe 5:

Eine Version des Banachschen Fixpunktsatzes lautet:

Seien  $(X, d)$  metrischer Raum,  $\emptyset \neq A \subset X$  und  $T: A \rightarrow X$  mit

(1)  $T(A) \subset A$  (2)  $A$  abgeschlossen (3)  $T$  Kontraktion (4)  $(X, d)$  vollständig.

Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt.

- a) Erklären Sie die in der Formulierung des Satzes auftretenden Voraussetzungen

i)  $T$  ist Kontraktionii) der metrische Raum  $(X, d)$  ist vollständig.

(2 Punkte)

- b) Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

(1 Punkt)

Seien  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $(t_0, x_0) \in D$ . Im Folgenden betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0.$$

- c) Formulieren Sie die Picard-Lindelöf Bedingung an
- $f$
- , d.h. die Voraussetzungen an
- $f$
- , unter denen mit dem Satz von Picard-Lindelöf auf die (lokale) Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems geschlossen werden kann. (1 Punkt)

- d) Erläutern Sie kurz, wie man die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems unter der Voraussetzung der Picard-Lindelöf Bedingung aus dem Banachschen Fixpunktsatz schließen kann. Gehen Sie hierbei insbesondere darauf ein, wie das Anfangswertproblem in eine äquivalente Fixpunktgleichung umformuliert werden kann und warum die Picard-Lindelöf Bedingung den Nachweis der Kontraktionseigenschaft ermöglicht. (2 Punkte)