

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten. Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z) - 3| \geq 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .  
(3 Punkte)
- b) Gibt es eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer Umgebung der 0, so dass  $f^{(n)}(0) = n^{2n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt?  
(3 Punkte)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen der Funktion  $f(z) = e^z + 3z^5$  in der offenen Einheitskreisscheibe  $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Zeigen Sie weiter, dass genau zwei verschiedene dieser Nullstellen positiven Imaginärteil haben und eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  liegt.  
(6 Punkte)

Aufgabe 3:

- a) Bestimmen Sie Lage und Ordnung der Pole der meromorphen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1 + 2z^2 + z^4}$$

(1 Punkt)

- b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + 2x^2 + x^4} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

(3 Punkte)

- c) Geben Sie die Laurent-Reihe in einem der Pole an.

(2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 4y(t) + f(t) = 0.$$

(4 Punkte)

- b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung  $y$  dieser Differentialgleichung gilt

$$y(t) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei das (autonome) System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y + 3, \\ \dot{y} &= x^2 - 4y + 20\end{aligned}$$

gegeben.

- a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.

(2 Punkte)

- b) Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

(4 Punkte)