Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:
Wie viele Lösungen (mit Vielfachheit gezählt) hat die Gleichung

$$z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + 6z = 1$$

in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $f(z) = -f(\bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$, bzw.

b) $\operatorname{Re} g(z) = \sin(\operatorname{Im} g(z))$, $z \in \mathbb{C}$, und $g(0) = 2\pi i$, bzw.

c) $h'(z) = z^2 h(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \implies f$ nimmt Maximum oder Minimum an.

b) f beschränkt $\implies f$ nimmt Maximum oder Minimum an.

c) f beschränkt und $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0 \implies f$ nimmt Maximum und Minimum an.

(6 Punkte)

Hinweis: Bei Teil (c) hilft Funktionentheorie.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x\,(x-2)\,e^{\cos x}, \ x(0) = 1.$$

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Welche stationären Lösungen hat die Differentialgleichung?

b) Die maximale Lösung x aus (a) existiert auf ganz $\mathbb{R}$ und ist monoton fallend und beschränkt.

c) Die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)$ existieren in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese Grenzwerte.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax, \ x(0) = x_0$.

b) Zeigen Sie, dass 0 eine stabile stationäre Lösung des linearen Systems $\dot{x} = Ax$ ist.

c) Geben Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften an:

i) $\dot{x} = Ax$ ist die Linearisierung der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ um $x = 0$.

ii) 0 ist eine instabile stationäre Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

(6 Punkte)