Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:
Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

und erläutern Sie dabei Ihre Rechenschritte.

Aufgabe 2:
Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so dass $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\operatorname{Im} g)(x + iy) = x^2 - y^2$?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

Aufgabe 3:
Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$$

für alle $z \in U$ gibt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\pi(x^2+y^2)) \\ x+\sqrt{3}y \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelösungen des ebenen autonomen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Ist die Ruhelösung $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ stabil oder instabil?

Aufgabe 5:

Für $\xi \in \mathbb{R}$ sei das Anfangswertproblem
$x' = \arctan(x), \quad x(0) = \xi$ gegeben.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Das Anfangswertproblem besitzt genau eine maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$.

b) λ_ξ besitzt genau dann eine Nullstelle, wenn $\xi = 0$ ist.

c) Für alle $t \in I_\xi$ gilt:

$$\xi - \frac{\pi}{2}|t| \le \lambda_\xi(t) \le \xi + \frac{\pi}{2}|t|.$$

d) $I_\xi = \mathbb{R}$.