Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte

Aufgabe 1:

Seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ b(t) := \begin{pmatrix} -t \\ e^{-t} \\ 1+t \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

b) Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Sei $D := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 + x^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $f(t,x) := \sqrt{1 - t^2 - x^2}$.
Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t,x),\ x(0) = 0$$

hat eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung $x :]a,b[\to \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < 0 < b < \infty$.

b) Die Grenzwerte $x(a) := \lim_{t \to a} x(t)$, $x(b) := \lim_{t \to b} x(t)$ existieren in $\mathbb{R}$.

c) Es gilt: $-a = b$, $b^2 + x(b)^2 = 1$, und $\frac{1}{\sqrt{2}} < b < 1$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; g(x, y) := x^3 + 3xy^2 - 3xy.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von g und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein (striktes) lokales Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Welche stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -6xy + 3x \\ \dot{y} &= 3x^2 + 3y^2 - 3y \end{aligned}$$

sind stabil, welche instabil?

Aufgabe 4:

a) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass es ein $z \in U$ gibt mit $f(z) \in \mathbb{R}$ und $f(z) > 1$.

b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn man
   i) auf die Voraussetzung $f(0) = 0$ verzichtet, oder
   ii) U durch eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $0 \in U$ und $1 \in U$ ersetzt?

Aufgabe 5:

Sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \; \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \text{auf } U$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = (1, 0), \; \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}, 0\right) = (-1, 0).$$

Zeigen Sie, dass es eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0), \; \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = (0, 1).$$

(Hinweis: Nutzen Sie Hilfsmittel der Funktionentheorie.)