

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte

**Aufgabe 1:**

Untersuchen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y-1|}$$

jeweils, ob es Lösungen mit den wie folgt vorgegebenen Werten gibt, und geben Sie im Falle der Existenz alle solchen Lösungen an:

- a)  $y(0) = 0$  und  $y(1) = 2$
- b)  $y(0) = 0$  und  $y(2) = 2$
- c)  $y(0) = 0$  und  $y(3) = 2$

**Aufgabe 2:**

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen  $y(x)$  der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4x}.$$

**Aufgabe 3:**

Für  $a \in \mathbb{R}$  sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Untersuchen Sie für alle  $a \in \mathbb{R}$ , ob der Fixpunkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  asymptotisch stabil oder stabil ist.

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

mit maximaler Definitionsmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$ .

- a) Zeigen Sie, dass das Integral der Funktion  $f$  über den positiv orientierten Kreis um 0 mit Radius 3 verschwindet.
- b) Zeigen Sie mit oder ohne Hilfe von (a), dass  $f$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$  eine komplexe Stammfunktion hat. (Diese braucht nicht unbedingt ausgerechnet zu werden.)

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei die Funktion

$$g : D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z}{\sin(z^2 - 4z)}$$

mit maximaler Definitionsmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$ .

- a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion  $g$  sowie jeweils deren Typ (hebbar? Polstelle wievielter Ordnung? wesentlich?).
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den Konvergenzradius der Potenzreihe für  $g$  um den Punkt 0. (Diese Formulierung gibt auch einen kleinen Hinweis für (a).)