

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben, insgesamt also maximal 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit einem *kurzen* Beweis oder einem Gegenbeispiel!

- a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.
- b) Wenn $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $f(z) = iz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- c) Wenn f eine nichtkonstante Polynomfunktion ist, dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i$.
- d) Die Funktion $\frac{1}{z}$ hat in 0 keinen Pol.
- e) Die Funktion $r \mapsto \int_{|z|=r} f(z) dz$ ist konstant auf $(0, \infty)$.
- f) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(z-1)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) := -1 + 3e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} \frac{(3+z)^2}{(1+9z^2)(9-z^2)} dz$$

und erläutern Sie Ihre Rechenschritte.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $f_n: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := \sum_{k=-n}^n \frac{1}{z+k}$.

Zeigen Sie, dass durch $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

mit beliebigen positiven Konstanten a, b, c, d .

- Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen.
- Welche Stabilitätsaussagen lassen sich über diese Gleichgewichte durch Linearisierung herleiten?

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Betrachten Sie das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 (\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 (\lambda - (x_1^2 + x_2^2)^2) \end{aligned}$$

mit einem positiven Parameter $\lambda > 0$.

- Bestimmen Sie mithilfe von Polarkoordinaten $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ alle periodischen Lösungen sowie deren (minimale) Periode $T > 0$.
- Bestimmen Sie für jede Lösung des Systems den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$.

(6 Punkte)