Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben, insgesamt also maximal 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Geben Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y^2 - 1},$$
$$y(0) = 1,$$

eine zweiparametrige Schar von Lösungen an. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Geben Sie alle Lösungen von

$$x^{(5)} - 2x^{(3)} + \dot{x} = e^t$$

für reelles $t \in \mathbb{R}$ an.

Hinweis: Ansatz für eine partikuläre Lösung: $x(t) = p(t)e^t$ mit einem Polynom $p(t)$. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f(0) = 0$ und $f(r)r > 0$ für alle $r \neq 0$. Zeigen Sie, dass die nichtlineare Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0$$

keine periodische Lösung außer $x(t) = 0$ besitzt.

Hinweis: Indirekter Beweis und Multiplikation mit $\dot{x}$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen harmonisch sind.

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f = u + iv \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil $u(x+iy) = x^2 + y^2$ ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Singularitäten von

$$f(z) = \frac{e^{\sin(z)} - \cos(z) - z}{\sin^2(z)}$$

sowie deren Typ (einschließlich der Ordnung jedes auftretenden Pols). Sie dürfen die Nullstellen der komplexen Sinusfunktion als bekannt voraussetzen. (6 Punkte)