Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

eine auf einem offenen Intervall um 0 *eindeutig bestimmte* Lösung hat, das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 1$$

aber nicht.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 3y \\ \dot{y} &= \dot{x} \\ x(0) &= 5, \ \dot{x}(0) = 0, \ y(0) = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 2x - 4x^3.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) für diese Differentialgleichung.

c) Zeigen Sie, dass alle maximalen Lösungen dieser Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

d) Skizzieren Sie das Phasenportrait für diese Differentialgleichung. Begründen Sie mit dessen Hilfe, welche der stationären Lösungen stabil sind, welche instabil. Besitzt die Differentialgleichung nicht konstante, periodische Lösungen?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis um 0 in $\mathbb{C}$.

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z)^3 = z^2, \; z \in \mathbb{E}?$$

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^4}, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2?$$

c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 2i, \; \lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1?$$

Die Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5:

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, dass f eine nicht konstante, affine Funktion ist, d. h., es gibt $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $f(z) = a\,z + b, \; z \in \mathbb{C}$.
(Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Art der Singularität von f in ∞.)