

Thema Nr. 2  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$x' = -y + x \sin(x^2 + y^2), \quad (1)$$

$$y' = x + y \sin(x^2 + y^2). \quad (2)$$

a) Bestimmen Sie alle periodischen Orbits.

b) Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Aufgabe 2:**

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Ruhelage 0 für das System  $x' = Ax$  asymptotisch stabil ist.

b) Weiterhin sei  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung  $y$  der Gleichung  $y' = Ay + b(t)$  asymptotisch stabil ist, indem Sie zeigen, dass für zwei Lösungen  $y$  und  $\tilde{y}$  immer gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| = 0.$$

**Aufgabe 3:**

Zeigen Sie: Ist  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant, so ist  $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$  dicht.

**Aufgabe 4:**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx, \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 4} dx.$$

**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie Formeln zur rekursiven Berechnung der Koeffizienten der Laurentreihe um  $z = 0$  für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

und berechnen Sie die drei ersten Koeffizienten (die von  $z^{-1}, 1, z$ ) explizit.