## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' - y^2 = 0$ und ihre maximalen zusammenhängenden Definitionsbereiche. Die Lösungsmenge wird mit $L_H$ bezeichnet.

b) Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $y' - y^2 = 1$ die Lösung $y_{sp}$ des Anfangswertproblems mit $y_{sp}(0) = 0$ und ihren maximalen zusammenhängenden Definitionsbereich.

c) Beweisen oder widerlegen Sie:
Man erhält alle Lösungen der Dgl. aus b), indem man die "spezielle Lösung" $y_{sp}$ aus b) zur "allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung" $y \in L_H$ aus a) addiert (auf der Schnittmenge der Definitionsbereiche).

**Aufgabe 2:**

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems $y_1'' = 3y_2$, $y_2'' = 27y_1$, indem Sie zunächst eine der beiden unbekannten Funktionen eliminieren.

b) Schreiben Sie das System aus a) um in ein System $u' = Au$ erster Ordnung mit einer $4 \times 4$-Matrix $A$.

c) Geben Sie vier Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ an, die denselben Vektorraum aufspannen wie die Spalten von $e^{xA}$. (Hinweis: Dabei macht es zuviel Mühe, $e^{xA}$ auszurechnen.)

**Aufgabe 3:**

a) Es sei $a > 0$. Untersuchen Sie, ob es eine in $B_{1+a}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + a\}$ holomorphe Funktion $f$ gibt, für die für ein festes $k > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(0)| > \frac{n!}{n^k}$$

gilt.

b) Es sei $f$ holomorph auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und für alle $z \in B_1(0)$ gelte $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$.
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in ]0, 1[$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)}$$

und folgern Sie

$$|f^{(n)}(0)| < e \cdot (n+1)!$$

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(3\theta)}{2+\cos(\theta)}\, d\theta,$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx \quad .$$

**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit folgenden Eigenschaften (für $z$ aus einer Umgebung von 0 in $\mathbb{C}$):

$$\begin{cases} zf''(z) - f(z) = z^2 + z - 1 \\ f(0) = 1, f'(0) = 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie zunächst $a_0$ und $a_1$ aus den Anfangswerten und $a_2$ und $a_3$ durch (formalen) Koeffizientenvergleich. Lesen Sie dann eine Rekursionsformel für $a_n$ $(n \geq 4)$ aus der Differentialgleichung ab. Geben Sie schließlich die $a_n$ explizit an und berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.