Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Bezeichnungen: Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| < 1\}$ und $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \big| \, |z| \leq 1\}$.

Aufgabe 1:
(Zwei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

Beweisen Sie:

a) Hat eine nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Perioden $\omega_1 \in \mathbb{C}$ und $\omega_2 \in \mathbb{C}$ – d. h. es gilt stets $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ –, so sind ω_1 und ω_2 linear abhängig über $\mathbb{R}$.

b) Für jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2:
Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{2}{z-2} \cdot \frac{4}{z-4}$$

bestimme man die Laurententwicklung in den zwei Bereichen $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ und $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$. Ferner berechne man längs $\alpha(t) = e^{it}$ und $\beta(t) = 3e^{3it}, t \in [0, 2\pi]$ die Integrale $\int_\alpha f(z)dz$ bzw. $\int_\beta f(z)dz$.

Aufgabe 3:
Sei G die geschlitzte Ebene $G := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in [0, \infty[\,\}$.

a) Begründen Sie, dass es eine konforme Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ gibt.

b) Geben Sie explizit eine solche Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ an.

Aufgabe 4:
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstelle, die periodisch mit der Periode $w > 0$ ist. Man zeigt:

a) Die maximalen Lösungen x der autonomen Differentialgleichung $\dot{x} = F(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Jede maximale Lösung x von $\dot{x} = F(x)$ ist surjektiv.

c) Es gibt eine Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x(t + b) - x(t) \in \mathbb{Z}w$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $b > 0$ eine geeignete Konstante ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Man bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} x$$