Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^2 z}$$

für $\operatorname{Im} z \geq \epsilon$ gleichmäßig konvergiert, und berechnen Sie $\lim\limits_{y \to \infty} f(iy)$.

Aufgabe 2:

Welche Werte kann das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)}$$

annehmen, wenn γ alle geschlossenen Integrationswege in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ durchläuft?

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Möbius-Transformation

$$f(z) := \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ biholomorph ist, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung $g(z)$.

b) Beschreiben und skizzieren Sie die Höhenlinien $|f(z)| = \text{const}$ von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$t^2\dot{x} + x = t$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$. Hier wird $\frac{dx}{dt}$ mit $\dot{x}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Lösung durch eine formale Potenzreihe $x = P(t)$.

b) Es gibt keine analytische Lösung.

c) Es gibt unendlich viele unendlich oft reell differenzierbare Lösungen, deren Taylorreihe in $t = 0$ stets die Reihe $P(t)$ ist.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, so dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf $[0, \infty[$ beschränkt sind.