Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Charakterisieren Sie den Typ der Ruhelagen des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y + xy\\ \dot{y} &= 2x - y - xy\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= t + \frac{\sin t}{1 + x^2 + y^2}y,\\ \dot{y} &= 3 + \frac{\cos t}{1 + x^2 + y^2}x,\end{aligned}$$

$(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$, für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = -(y - 1), \quad \dot{y} = x - 1$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssytems

$$\dot{x} = -(y - 1) + \cos(t), \quad \dot{y} = x - 1$$

für die Anfangswerte $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

(Zwei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

a) Zeigen Sie, dass eine auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ injektive holomorphe Funktion f keine wesentliche Singularität in $z = 0$ hat.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzen Funktion $\cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 4:

Geben Sie die Laurent-Entwicklung für $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ in den folgenden Ringgebieten an:

$$R := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \mathrm{i}| < 2\} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{R} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Aufgabe 5:

Sei $f := p/q$ eine rationale Funktion und sei der Grad des Nennerpolynoms q um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms p. Zeigen Sie, dass die Summe der Residuen von f verschwindet, d.h.

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}(f; a) = 0.$$