Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Riemannschen Abbildungssatz.

(b) Finden Sie eine Funktion der Form $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, die die rechte Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

abbildet (mit Beweis).

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Berechnen Sie:

(a) $$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z-i)},$$

(b) $$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z^2+z+1)}{z}\, dz.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die

$$f\left(e^{\sqrt{2}\pi i n}\right) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''''(t) - 5\,y''(t) + 6\,y(t) = te^t.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Es sei $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^∞-Vektorfeld mit $\langle v(x), x\rangle = 0$ für alle x mit $\|x\| = 1$.
Die Klammern $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnen das übliche Skalarprodukt, $\langle x, y\rangle := \sum x_i y_i$.
Beweisen Sie, dass jede maximal Lösung von

$$\frac{dx}{dt} = v(x) \quad \text{mit} \quad \|x(0)\| = 1$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und stets $\|x(t)\| = 1$ erfüllt.