Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Drücken Sie das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{z^4} e^{1/z} dz$$

durch eine unendliche Reihe aus und berechnen Sie den Wert auf drei Nachkommaziffern genau. Beweisen Sie durch eine Abschätzung des Reihenrests, dass die berechneten Ziffern richtig sind!

Aufgabe 2:

Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ das Äußere der Einheitskreisscheibe. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $(f(z))^3 = z^3 - 1$? Gibt es eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit $(g(z))^4 = z^3 - 1$?

Aufgabe 3:

Es bezeichne $\mathcal{J}$ die Menge aller ganzen Funktionen f, die $f(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen erfüllen. Ein Beispiel einer Funktion in $\mathcal{J}$ ist

$$f(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi z)}{z^2 - 1}.$$

a) Zeigen Sie, dass für beliebige $f_1, f_2 \in \mathcal{J}$ und beliebige ganze Funktionen g auch $f_1 + f_2 \in \mathcal{J}$ und $gf_1 \in \mathcal{J}$ gilt. (Die Menge $\mathcal{J}$ ist ein Ideal im Ring der ganzen Funktionen.)

b) Zeigen Sie: Zu beliebigen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{J}$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{J}$, die sich nicht in der Gestalt $f = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu f_\nu$ mit ganzen Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ darstellen lässt. (Das Ideal $\mathcal{J}$ ist nicht endlich erzeugt.)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Mit reellen Zahlen a, b, c sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für jedes der beiden Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ und $y' = By$ eine Basis des Raumes der Lösungen an! Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konstanten a, b, c an, so dass Folgendes gilt:

i) Für alle Lösungen φ ist $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für a, b, c an, so dass gilt:

ii) Es existiert eine nicht-konstante periodische Lösung.

Aufgabe 5:

Auf $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\right\}$ sei das autonome System

$$\dot{x} = x - axy,$$
$$\dot{y} = -y + bxy$$

mit Konstanten $a > 0,\ b > 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H(x,y) = (bx - \log x) + (ay - \log y)$$

längs einer jeden Lösung des Systems konstant ist.

b) Zeigen Sie: Für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ ist die maximale Lösung φ des Systems mit dem Anfangspunkt $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und sie ist periodisch.