

**Thema Nr. 2****(Aufgabengruppe)**

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

**Aufgabe 1:**

Sei  $D$  der Durchschnitt der beiden offenen Kreisscheiben  $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$  und  $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ . Bestimmen Sie das Bild von  $D$  unter der Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z}{z - (1 + i)}.$$

**Aufgabe 2:**

Für  $n = 0, 1, 2, \dots$  sei  $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  das durch

$$P_n(z) := \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dz^n} \{(z^2 - 1)^n\}$$

definierte Polynom vom Grad  $n$ .

a) Beweisen Sie die Gleichheit

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

wobei  $C$  eine beliebige positiv orientierte, einfach geschlossene Kurve sei, die  $z$  in ihrem Inneren enthält.

b) Verwenden Sie a) zur Berechnung von  $P_n(1)$  und  $P_n(-1)$ .

**Aufgabe 3:**

Bestimmen Sie eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  mit folgenden drei Eigenschaften:

1. Die Polmenge von  $f$  ist  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .
2. Alle Pole von  $f$  haben die Ordnung 1.
3. Das Residuum von  $f$  bei  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ist  $n$ .

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y' - 2y = \cosh(2x), \quad y(0) = 1.$$

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei das autonome System

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 2x^3. \end{cases}$$

- a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Gleichgewichtspunkte von (\*).
- b) Skizzieren Sie (etwa durch Integration von  $\frac{dy}{dx}$ ) die Trajektorien für das zugeordnete lineare System.
- c) Zeigen Sie, dass unter den Trajektorien aus b) nur diejenige für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $(0, 0)$  strebt, für die immer  $y = -x$  gilt.
- d) Bestimmen Sie die Trajektorien des Systems (\*).