Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

(1 + 2 + 3 Punkte) Es seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 4x^2 + 9y - \frac{1}{3}y^3$.

a) Skizzieren Sie die Menge D.
b) Zeigen Sie, dass f (auf D) ein globales Maximum besitzt.
c) Bestimmen Sie den Wert des globalen Maximums von f sowie sämtliche Stellen (in D), an denen dieser Wert angenommen wird.

Aufgabe 2:

(1 + 4 + 1 Punkte)

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.
b) Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$z + \mathrm{e}^{-z} = 2021$$
in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.
c) Zeigen Sie, dass diese Lösung sogar reell ist.

Aufgabe 3:

(3 + 1 + 2 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die skalare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) und bestimmen Sie für alle Lösungen das maximale Existenzintervall.
b) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die es eine nicht konstante periodische Lösung von (1) gibt.
c) Bestimmen Sie nun die Menge aller maximalen Lösungen von

$$\ddot{x}(t) - x(t) = t \cdot \exp(-t). \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $x(t) = p(t)\exp(-t)$ mit einem Polynom höchstens zweiten Grades p, um eine spezielle Lösung zu finden.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

(3 + 3 Punkte) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Geben Sie alle Lösungen mit maximalem Existenzintervall der Differentialgleichung

$$y'(t) + \frac{2t}{1+t^2}y(t) = g(t)$$

an.

b) Zeigen Sie, dass für jede solche Lösung y dieser Differentialgleichung gilt

$$y(t) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty,$$

wenn $\lim\limits_{t\to\infty} tg(t) = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 5:

(2 + 4 Punkte)

a) Es sei $n \in \{1, 2, \ldots\}$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie die Lage und Ordnung der Pole der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$.

b) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral $\int_\gamma \frac{1}{1+z^n}\,\mathrm{d}z$ für den geschlossenen Weg γ, der von 0 in gerader Linie nach R, von dort auf dem Kreissegment mit Radius R nach $R\mathrm{e}^{2\pi i/n}$ und von hier aus in gerader Linie wieder zurück nach 0 verläuft.