

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Im Folgenden sei $\arctan$ die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte reelle Arcustangensfunktion.

a) Zeigen Sie

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } x > 0.$$

b) Zeigen Sie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1$$

und die Divergenz des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) dx.$$

c) Zeigen Sie, dass es keine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $g(x) = \arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei auf dem $\mathbb{R}^2$ das folgende System von autonomen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= y^3 - x^2 y, \\ y' &= xy^2 - x^3. \end{aligned} \tag{2}$$

- a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von (2). Entscheiden Sie begründet, ob (2) eine asymptotisch stabile Ruhelage besitzt, so dass für $t \rightarrow \infty$ alle Lösungen gegen diese Ruhelage konvergieren.
- b) Zeigen Sie, dass $E(x, y) := y^2 - x^2$ eine Erhaltungsgröße (d. h. ein Erstes Integral) von (2) ist.
- c) Bestimmen Sie für $c > 0$ die eindeutige maximale Lösung von (2) zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (c, 0)$ und entscheiden Sie mit Begründung, ob die Ruhelage $(0, 0)$ stabil ist.

Hinweis: Man kann mittels Teilaufgabe (b) zeigen, dass jede Lösung φ von (2) zum Anfangswert $\varphi(0) = (c, 0)$ ein geeignetes lineares Differentialgleichungssystem löst.

(2 + 1 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:

- a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{n^3 x^2}{1 + n^4 x^4}$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_n$ punktweise auf $[0, 1]$ gegen 0 konvergiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{1 + x^4} dx$$

gilt. (Die Existenz dieses uneigentlichen Riemann-Integrals brauchen Sie nicht zu begründen.) Entscheiden Sie, ob $(f_n)_n$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen 0 konvergiert und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- b) Skizzieren Sie für $R > 1$ den Weg $\gamma_R : [0, 2R + \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$, der definiert ist durch

$$\gamma_R(t) := \begin{cases} t & t \in [0, R], \\ Re^{i(t-R)} & \text{für } t \in (R, R + \frac{\pi}{2}], \\ i(2R + \frac{\pi}{2} - t) & t \in (R + \frac{\pi}{2}, 2R + \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1 + z^4} dz.$$

- c) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene.

- a) Bestimmen Sie so explizit wie möglich alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, die

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2^n}, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\},$$

erfüllen. Für $n = 0$ und $n = 1$ wird keine Forderung gestellt. Sollte es keine solche Funktion geben, zeigen Sie, dass sie nicht existiert.

- b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, die

$$f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) = \log\left(2 - \frac{1}{n}\right), \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\},$$

erfüllen. Für $n = 0$ und $n = 1$ wird keine Forderung gestellt. Sollte es keine solche Funktion geben, zeigen Sie, dass sie nicht existiert. Hierbei bezeichnet $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ den natürlichen reellen Logarithmus.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta \int_0^t x(s) ds = \sin t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = \gamma, \quad (3)$$

mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (3) für jede Wahl von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.
- b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (3) für

$$(i) \quad \alpha = -1, \beta = \gamma = 0 \quad \text{und} \quad (ii) \quad \alpha = 0, \beta = \gamma = 1.$$

(3 + 3 Punkte)