

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Sei

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{3}y^3 + x^2y - xy.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von F und entscheiden Sie begründet, welche lokale Maxima bzw. lokale Minima sind.

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - x + y^2, \\ \dot{y} &= y - 2xy.\end{aligned}$$

Entscheiden Sie begründet, welche stationären Lösungen stabil bzw. instabil sind.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

- a) Entscheiden Sie, ob die Funktion $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos(z)$ beschränkt auf $\mathbb{C}$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort!
- b) Überprüfen Sie, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im}(z)$ komplex differenzierbar ist.
- c) Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z} + \frac{1}{z-2} \left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1 \right)$$

- a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie jeweils das Residuum.
- b) Es sei $V := \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\frac{3}{2} - z| \leq \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_{\mathbb{C} \setminus V}$ von f auf $\mathbb{C} \setminus V$ eine Stammfunktion besitzt.

(4 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(y)$.
- b) Zeigen Sie, dass jede maximal fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ monoton wachsend ist und auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.
- c) Berechnen Sie explizit eine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- d) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(0) = -1$$

nicht eindeutig lösbar ist.

(1 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Aufgabe 5:

- a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Es sei ferner $f(0) = 0$ ein lokales Minimum von f . Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \int_0^1 (1-t)x^2 f''(tx) dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

- b) Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei ferner $F(0) = 0$ ein lokales Minimum von F . Die Hessematrix von F im Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $H_F(z)$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_0^1 (1-t) \langle x, H_F(tx)x \rangle dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(3 + 3 Punkte)