Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:
Es seien

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1, y \geq 0\}$$

und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = 27y + 7y^2 - y^3 + 5x^2(1 + y^2)$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum besitzt.

   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, zunächst zu zeigen, dass ein $R > 0$ existiert, sodass $f(x, y) \leq 0$ für alle $(x, y) \in D$ mit $y > R$ gilt.

c) Bestimmen Sie sämtliche Stellen in D, an denen das globale Maximum angenommen wird.

(0,5 + 2 + 3,5 Punkte)

Aufgabe 2:
Geben Sie jeweils an, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist, und führen Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, so dass $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, dann ist das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen.

c) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| = \sin(\pi|z|)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. (Hier ist $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene.)

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

Die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\gamma(t) := \frac{1}{2}e^{it}$.

a) Berechnen Sie für jedes $k \in \mathbb{Z}$ das Integral

$$\int_\gamma z^{2k-1} e^{1/z^2} dz.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z^2}}{z(1-z^2)} dz.$$

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{ty(t)}{\sqrt{1+y(t)^2}}, \quad y(0) = 1, \tag{1}$$

gegeben.

Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie die Lösung von (1) nicht explizit zu berechnen.

a) Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem (1) besitzt eine eindeutige maximale Lösung $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie: Es gilt $y(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$ für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst $0 \leq y'(t) \leq t$ für alle $t \geq 0$ zu zeigen.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(u)u > 0$ für alle $u \neq 0$. Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x''(t) + f(x'(t)) + x(t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die einzige periodische Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung die Funktion mit $x(t) = 0$ ist.

Hinweis: Im Fall $f = 0$ ist $E(t) := x'(t)^2 + x(t)^2$ eine Erhaltungsgröße. Auch für die hier gestellte Aufgabe ist die Betrachtung von E hilfreich.

(6 Punkte)