Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen Text zu begründen. Für jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = z^n - 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

alle Nullstellen mit strikt positivem Realteil.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine der Nullstellen mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ aus Teilaufgabe (a). Zeigen Sie, dass $w = z + z^{n-1}$ eine reelle Zahl echt größer Null ist.

(c) Sei $n = 5$ und $w > 0$ eine der positiven reellen Zahlen aus Teilaufgabe (b). Nehmen Sie $w \neq 2$ an und zeigen Sie, dass

$$w^2 + w - 1 = 0$$

gilt. Bestimmen Sie den Winkel $\alpha \in]0, \pi[$ mit $w = 2\cos\alpha$.

Aufgabe 2 (3+2+1 Punkte)

(a) Seien $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ Folgen reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$. Beweisen Sie mithilfe der Cauchy–Schwarz-Ungleichung und der Dreiecks-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

(c) Sei $(c_k)_{k\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < \infty$. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 3 (1+5 Punkte)

(a) Erstellen Sie eine beschriftete Skizze der Menge

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}.$$

(b) Sei $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $w_2 > 0$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von w alle lokalen Extremstellen der linearen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2,$$

unter der Nebenbedingung, dass $x_1 x_2 = 1$ gilt. Diskutieren Sie, ob es sich bei den lokalen Extremstellen jeweils um ein lokales/globales Maximum/Minimum handelt.

Aufgabe 4 (1+2+1+2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = (z^2 + 4\pi^2)\sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie für alle reell ganzzahligen Vielfachen von π das Residuum von $1/f$.

(c) Erstellen Sie eine beschriftete Skizze der Menge

$$M = \{t - i\cos t \,|\, t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z \geq 1,\, |z - i| = \pi\}$$

und bestimmen Sie einen geschlossenen Weg Γ, so dass M das Bild von Γ ist.

(d) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\Gamma \frac{dz}{f(z)}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $y^{(k)}$ die k-te Ableitung von y bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 12x + 20\exp(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$