Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen Text zu begründen. Für jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1 (5+1 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i, 0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto \dfrac{1}{z} + \exp\left(\dfrac{z-i}{z^2+1}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei i, 0 und $-i$ und berechnen Sie die Residuen $\operatorname{Res}(f, i)$, $\operatorname{Res}(f, 0)$ und $\operatorname{Res}(f, -i)$ von f bei i, 0 und $-i$.

(b) Weiter sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{-i, i, 0\}$, $t \mapsto 2e^{-2it}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

Aufgabe 2 (3+1+2 Punkte)

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto 4z + z^2 + e^z$.

(a) Zeigen Sie, dass f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ genau eine einfache Nullstelle besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass es für $f|_\mathbb{E} : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ keinen holomorphen Logarithmuszweig – also kein holomorphes $l : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $e^{l(z)} = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

(c) Zeigen Sie, dass es für $f|_\mathbb{E}$ keinen holomorphen Zweig der dritten Wurzel – also kein holomorphes $w : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit $(w(z))^3 = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{E}$ – gibt.

Aufgabe 3 (3+3+1 Punkte)

Es sei $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix e^{At} zu $x' = Ax$.

(b) Bestimmen Sie die maximale Lösung von

$$x' = Ax + g(t) \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die in (b) bestimmte Lösung von $x' = Ax + g(t)$ asymptotisch stabil ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (1+3+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\xi > -1$ das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x+t} - 1 \quad , \quad x(1) = \xi \tag{2}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie für $\xi > -1$ die maximale Lösung λ_ξ von (2). Geben Sie auch deren Definitionsbereich I_ξ (mit Begründung) explizit an.
Hinweis: Die Substitution $y(t) := x(t) + t$ kann hier helfen.

(c) Zeigen Sie, dass $\lambda_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ eine asymptotisch stabile Lösung von $x' = \frac{1}{x+t} - 1$ ist.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte)

(a) Gegeben sei die Menge $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq 2|y| \leq x \leq 6\}$. Skizzieren Sie diese Menge in einem kartesischen Koordinatensystem und berechnen Sie den Wert des Integrals $\iint\limits_{\Delta} (x-y)^2 dxdy$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z^3}$ mit Definitionsbereich $D := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_\gamma f(z)dz$ mit $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Entscheiden Sie mit Begründung, ob f eine holomorphe Stammfunktion auf D besitzt.