Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen Text zu begründen. Für jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1 (3+1+2 Punkte)

(a) Es sei

$$P(z) := 2019z^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| < 1$ für alle $k = 0, \ldots, 2018$ gelte.

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (mit Berücksichtigung von Vielfachheiten gezählt).

(b) Formulieren Sie für den Spezialfall holomorpher Funktionen das *Argumentprinzip* (auch als *Satz vom nullstellenzählenden Integral* bekannt).

(c) Es sei P wie in (a) definiert. Zeigen Sie

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz\right) = 1.$$

Hierbei bezeichnet $\partial\mathbb{D}$ die einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.

Aufgabe 2 (1+2+3 Punkte)

(a) Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Formulieren Sie das *Majorantenkriterium von Weierstraß für die gleichmäßige Konvergenz* der Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $\mathbb{R}$.

Von nun an sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass f dehnungsbeschränkt (global Lipschitz-stetig) ist, d.h. dass es ein $L > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt.

Fortsetzung nächste Seite!

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)-f(0)\right]$$

gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert (bezüglich x). Begründen Sie, ob die Grenzfunktion stetig ist.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es sei $x_0 \in]-\pi,\pi[$ und $\varphi : I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = 1+\cos(x), \qquad x(0) = x_0.$$

Dann ist φ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (also $I_{\max} = \mathbb{R}$) und $\varphi(t) \in]-\pi,\pi[$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Dann ist jede nicht-konstante Lösung der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ streng monoton.

Aufgabe 4 (3+1+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= e^{2x} \end{aligned}$$

besitzt ein Erstes Integral S, d.h. es gibt eine nicht-konstante Funktion $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $t \mapsto S(x(t),y(t))$ für jede Lösung $t \mapsto (x(t),y(t))$ des Differentialgleichungssystems konstant ist.

Leiten Sie hieraus ab, dass jede Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $(x(0),y(0)) = (0,1)$ die Relation $y(t) = e^{x(t)}$ für alle t aus dem Definitionsbereich der Lösung erfüllt.

(b) Zeigen Sie (z. B. mithilfe von (a)), dass jede Lösung des Anfangswertproblems

$$x'' = e^{2x}, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \tag{1}$$

auch das Anfangswertproblem

$$x' = e^x, \qquad x(0) = 0$$

löst.

(c) Bestimmen Sie (z. B. mithilfe von (b)) die maximale Lösung des Anfangswertproblems (1).

Hinweis: Geben Sie auch das maximale Definitionsintervall an.

Anmerkung: Die Existenz der maximalen Lösungen der in dieser Aufgabe betrachteten Anfangswertprobleme muss nicht begründet werden.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1 + i$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(b) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, und es seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie, dass es eine biholomorphe (konforme und surjektive) Abbildung $f : G \longrightarrow G$ von G auf sich selbst mit $f(a) = b$ gibt.

(c) Wie in Aufgabe 1 sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D} \qquad \text{und} \qquad f(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

gibt.