Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 1:
Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 992 = 2^5 \cdot 31$. Für eine Primzahl p bezeichne n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G.

(1) Geben Sie die prinzipiellen Möglichkeiten für die Werte von n_2 und n_{31} an, die sich aus den Sylowsätzen ergeben.

(2) Zeigen Sie (ohne den Satz von Burnside zu benutzen), dass G auflösbar ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Ist die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \text{ für alle } a \in G\}$$

nicht leer, so heißt deren Minimum der **Exponent** der Gruppe G und wird mit $\exp(G)$ bezeichnet. Ist die obige Menge leer, so setzt man $\exp(G) = \infty$. Zeigen Sie:

(1) Ist G endlich, so ist $\exp(G) = \max\{\operatorname{ord}(a) \mid a \in G\}$.

(2) Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Torsionsgruppe (d. h. zu jedem $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx = 0$) mit $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$.

Aufgabe 3:
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $a \in R$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Element $1 + aX$ ist eine Einheit im Polynomring $R[X]$.

(ii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei α die reelle Zahl $\alpha := \sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, und es sei ζ die dritte Einheitswurzel $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$.

(1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.

(2) Es sei $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f in $\mathbb{C}$ gilt $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta)$.

(3) Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt[3]{2}$ in L liegt, und folgern Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler vom Index 6 besitzt.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Es seien K ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ und $f \in K[X]$ ein Polynom. Weiter sei $Z \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von f über K. Der Grad $[Z : K]$ sei ungerade. Zeigen Sie, dass dann auch Z ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist. (12 Punkte)