Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass das Produkt aller Elemente $\neq 0$ in K gleich -1 ist.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei R ein kommutativer unitärer Ring, der den endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ enthält. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon R \to R$, $F(x) = x^p$, ein Ringhomomorphismus ist. Geben Sie je ein Beispiel für solch einen Ring R an, für den $F\colon R \to R$

a) ein Isomorphismus,

b) kein Isomorphismus

ist (mit Begründung).

(10 Punkte)

Aufgabe 3:
Man zeige, dass keine zwei der folgenden Gruppen zueinander isomorph sind:

a) Die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$,

b) die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$,

c) die alternierende Gruppe A_4, und

d) die Diedergruppe D_6 (Symmetriegruppe des regulären 6-Ecks).

(14 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{C} \\ P &\mapsto P(\omega). \end{aligned}$$

Diese ist ein Ringhomomorphismus (das brauchen Sie nicht zu zeigen).

a) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes von f als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

b) Bestimmen Sie den Kern von f.

c) Untersuchen Sie, ob der Kern von f ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $K = \mathbb{C}(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{C}[t]$ und $P(X) = X^3 - 2tX + t \in K[X]$. Zeigen Sie, dass P irreduzibel in $K[X]$ ist.

(14 Punkte)