Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2×2-Matrizen mit Determinante 1. Die Abbildung

$$\varrho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times H \to H\,, \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

definiert eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf H.

(a) Geben Sie die Bahnen von ϱ an.

(b) Geben Sie den Stabilisator von $i \in H$ an.

(6+2 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien A, B abelsche Gruppen und $\phi : B \to \mathrm{Aut}(A)$ ein Homomorphismus von B in die Gruppe der Automorphismen von A. Das *semidirekte Produkt* $A \rtimes_\phi B$ ist die folgendermaßen definierte Gruppe:

$$A \rtimes_\phi B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1\phi(b_1)(a_2), b_1b_2)$$

(a) Zeigen Sie, dass $A \rtimes_\phi B$ genau dann abelsch ist, wenn ϕ trivial ist, also $\phi(b) = \mathrm{id}_A$ für alle $b \in B$ gilt.

(b) Konstruieren Sie eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 2015.

(6+10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Im Folgenden sei K der jeweils angegebene Körper. Entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix A über K diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, K = \mathbb{C}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \mathbb{R}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \mathbb{F}_5$

(d) $A = \begin{pmatrix} X+1 & 1 \\ X-1 & 2X-1 \end{pmatrix}$, K ist der rationale Funktionenkörper $\mathbb{R}(X)$.

(2+2+3+3 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $p > 2$ eine Primzahl. Wir betrachten den Körper $\mathbb{Q}(\zeta_p, \alpha_p) \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha_p = \sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}$ und $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Zeigen Sie:

(a) Die Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist galoissch.
(b) $[K : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.
(c) Die Teilerweiterung $\mathbb{Q}(\alpha_p)/\mathbb{Q}$ ist nicht normal und daher ist die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ nicht abelsch.
(d) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ hat einen Normalteiler der Ordnung p.

(2+6+6+2 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei p eine Primzahl. Wir betrachten in $\mathbb{F}_p[X]$ die Polynome $P_1 = X^2 + X + 1$ und $P_2 = X^3 + X^2 + X + 1$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{F}_p[X]$ des Kongruenzsystems

$$F \equiv X - 1 \bmod P_1 \text{ und } F \equiv 1 \bmod P_2,\ F \in \mathbb{F}_p[X].$$

(10 Punkte)