

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Seien  $N$  ein auflösbarer Normalteiler einer endlichen Gruppe  $G$  und  $H$  eine weitere auflösbare Untergruppe von  $G$ . Zeigen Sie, dass

$$NH = \{nh \mid n \in N, h \in H\}$$

wieder eine auflösbare Untergruppe von  $G$  ist.

(12 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Seien  $p$  eine Primzahl und  $k \leq p - 2$ . Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix  $I_k$  die einzige Matrix  $A \in \text{GL}_k(\mathbb{Q})$  mit der Eigenschaft  $A^p = I_k$  ist.

(12 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einselement. Zu jedem  $a \in R$  existiere ein  $b \in R$  mit  $a^2 \cdot b = a$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $R$  reduziert ist, das heißt, dass  $0$  das einzige nilpotente Element in  $R$  ist.
- (b) Zeigen Sie weiter, dass jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  in  $R$  maximal ist.

(12 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Sei  $a \in \mathbb{N}_0$ . Wir definieren eine Folge  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  durch

$$x_n := a^{2^n} + 1.$$

1. Sei  $n < m$ . Zeigen Sie, dass  $x_n$  ein Teiler von  $x_m - 2$  ist.
2. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von  $x_n$  und  $x_m$ .
3. Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(12 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Sei  $f(X)$  ein separables Polynom über  $\mathbb{Q}$ , welches in der Form  $f(X) = h(X^2)$  mit  $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$  und  $n := \deg h(X) \geq 2$  geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass die Galoissche Gruppe (eines Zerfällungskörpers) von  $f(X)$  nicht die volle symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_{2n}$  der Nullstellen sein kann.

(12 Punkte)