Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $x^6 - 2x + 4 = 0$ im Ring $\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$. (8 Punkte)
Tipp: Führen Sie eine Fallunterscheidung je nach Bild von x in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ durch und beachten Sie, dass $64 = 2^6$.

Aufgabe 2:
Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Anzahl der eindimensionalen $\mathbb{F}_q$-Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^n$ gleich $\frac{q^n-1}{q-1}$ ist. (4 Punkte)
b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der zweidimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ gleich der Anzahl der eindimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^3$ ist. (4 Punkte)
c) Wie viele Zerlegungen von $\mathbb{F}_q^3$ in direkte Summen von $\mathbb{F}_q$-Untervektorräumen $V_1 \oplus V_2$ gibt es mit $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_1) = 2$? (4 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie bis auf Isomorphie sämtliche endliche Gruppen G der Ordnung $143 = 11 \cdot 13$.
(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $P(X)$ das Polynom $X^3 - X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Das Bild von $P(X)$ in $\mathbb{F}_3[X]$ ist irreduzibel. (2 Punkte)
b) Das Polynom $P(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. (2 Punkte)
c) Das Polynom $P(X)$ hat genau eine reelle Nullstelle. (4 Punkte)
d) Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von $P(X)$ über $\mathbb{Q}$ ist isomorph zu S_3.
(4 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel, $\zeta_7 \in \mathbb{C}$ eine primitive siebte Einheitswurzel und $u = \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$. Zeigen Sie:

a) $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}(u)] = 2$, (4 Punkte)
b) $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 3$, (4 Punkte)
c) $[\mathbb{Q}(u, \zeta_5) : \mathbb{Q}] = 12$. (6 Punkte)
d) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u, \zeta_5)/\mathbb{Q})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. (6 Punkte)