Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei G eine Gruppe mit 2014 Elementen. Zeigen Sie, dass G einen zyklischen Normalteiler der Ordnung $1007 = 19 \cdot 53$ besitzt.

(11 Punkte)

Aufgabe 2:

Wie viele Quadrate gibt es im Ring $\mathbb{Z}/2014\mathbb{Z}$?

(11 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei G eine abelsche Gruppe, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in G$ zwei Elemente mit teilerfremden Ordnungen, dann gilt $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(a) \cdot \operatorname{ord}(b)$. (6 Punkte)

b) Seien k, ℓ zwei natürliche Zahlen. Beweisen Sie: Es gibt natürliche Zahlen k_0, ℓ_0 mit

$$\operatorname{ggT}(k_0, \ell_0) = 1, \quad k_0 \mid k, \quad \ell_0 \mid \ell \quad \text{und} \quad k_0\ell_0 = \operatorname{kgV}(k, \ell)\,.$$

(4 Punkte)

c) Folgern Sie aus a) und b), dass zu beliebigen $x, y \in G$ ein $z \in G$ existiert mit $\operatorname{ord}(z) = \operatorname{kgV}\big(\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y)\big)$. (2 Punkte)

d) Beweisen Sie: Ist $m := \sup\{\operatorname{ord}(x) \mid x \in G\} < \infty$, dann gilt $\operatorname{ord}(a) \mid m$ für jedes $a \in G$. (2 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\omega^2 \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}[\omega] := \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$. (2 Punkte)

b) Für $z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ sei $z^* = a - b\omega$. Dann ist die *Normabbildung*

$$N\colon \mathbb{Z}[\omega] \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad z \longmapsto zz^*$$

multiplikativ, d.h., für $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\omega]$ gilt $N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$. (2 Punkte)

c) Ein Element $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ ist genau dann eine Einheit, wenn $|N(z)| = 1$ ist.

(4 Punkte)

d) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{26}]$ besitzt unendlich viele Einheiten. (4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

a) Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3, das genau eine reelle Nullstelle besitzt. Zeigen Sie, dass dann seine Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

(6 Punkte)

b) Sei p eine beliebige Primzahl. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms

$$X^4 - X^3 + pX^2 - p \in \mathbb{Q}[X] \,.$$

(6 Punkte)