

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Es seien  $L \supseteq K$  eine endliche Galoiserweiterung und  $p$  eine Primzahl, die den Körpergrad  $[L : K]$  teilt.

- a) Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper  $K \subseteq Z \subseteq L$  gibt, so dass

$$[L : Z] = p^m \quad \text{und} \quad p \nmid [Z : K]$$

für ein  $m \in \mathbb{N}$  gilt.

(8 Punkte)

- b) Bestimmen Sie im Fall  $K = \mathbb{Q}$ ,  $L = \mathbb{Q}(\zeta_7)$  mit einer primitiven siebten Einheitswurzel  $\zeta_7$  und  $p = 3$  einen solchen Zwischenkörper, indem Sie ein primitives Element  $\alpha$  dafür angeben.

(8 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht der Nullring ist. Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal von  $R$ . Betrachten Sie die Teilmenge

$$\mathfrak{p}R[X] := \left\{ \sum_{i=1}^r a_i f_i(X) \mid r \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{p} \text{ und } f_i(X) \in R[X] \right\}$$

im Polynomring  $R[X]$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{p}R[X]$  ein Ideal von  $R[X]$  ist. (2 Punkte)
- b) Geben Sie einen Isomorphismus  $R[X]/\mathfrak{p}R[X] \rightarrow (R/\mathfrak{p})[X]$  an (mit Beweis). (6 Punkte)
- c) Zeigen Sie, dass  $\mathfrak{p}R[X]$  ein Primideal, aber kein maximales Ideal von  $R[X]$  ist. (6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Es sei  $K \subseteq L$  eine Körpererweiterung, und es seien  $\alpha, \beta \in L$ , so dass  $\alpha + \beta$  und  $\alpha\beta$  beide algebraisch über  $K$  sind.

Zeigen Sie, dass dann auch  $\alpha$  und  $\beta$  algebraisch über  $K$  sind. (10 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Die endliche Gruppe  $G$  operiere transitiv auf der endlichen Menge  $X \neq \emptyset$ , so dass jedes  $g \in G$  mindestens einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie:

a). Es bezeichne  $G_x$  den Stabilisator von  $x$  in  $G$ . Dann gilt

$$G \setminus \{1\} = \bigcup_{x \in X} (G_x \setminus \{1\}).$$

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass  $X$  nur ein Element hat.

(9 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch  $n$  den Rest  $n-1$  hat, für alle  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . (8 Punkte)