

**Thema Nr. 3**  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Sei  $r \geq 1$ . Die komplexen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  seien alle algebraisch vom Grad 2 über  $\mathbb{Q}$ . Setze  $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ . Zeigen Sie, dass  $K$  eine Galoiserweiterung von  $\mathbb{Q}$  ist. Sei  $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  und  $C_2$  eine Gruppe der Ordnung 2. Geben Sie einen natürlichen injektiven Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow C_2^r$  an.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Sei  $f = X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  genau zwei reelle Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$  hat.
- b) Zeigen Sie, dass  $f$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$  ist.
- c) Sei  $g = X^3 + 4X - 1$ , und  $a \in \mathbb{C}$  komplex. Zeigen Sie, dass es genau dann komplexe Zahlen  $b, c, d \in \mathbb{C}$  gibt mit  $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ , wenn  $g(a^2) = 0$ .
- d) Zeigen Sie, dass  $g$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$  ist.
- e) Sei  $g(a^2) = 0$  für  $a \in \mathbb{R}$  reell. Zeigen Sie, dass  $a \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ .
- f) Zeigen Sie, dass  $x_1$  oder  $x_2$  nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

- a) Eine Permutation  $\sigma$  sei das Produkt zweier disjunkter Zyklen der teilerfremden Längen  $k$  und  $\ell$ . Welche Ordnung hat  $\sigma$ ?
- b) Sei  $a(n)$  die größte Elementordnung in der symmetrischen Gruppe  $S_n$ . Man zeige  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n} = \infty$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Sei  $p$  eine Primzahl,  $e, n \in \mathbb{N}$  und  $G$  eine Untergruppe von  $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$  mit  $p^e$  Elementen. Zeigen Sie: Es gibt einen Spaltenvektor  $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$  mit  $\gamma \cdot v = v$  für alle  $\gamma \in G$ . (Hinweis: Betrachten Sie die Bahnlängen von  $G$  auf  $\mathbb{F}_p^n$ .)

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Es sei  $p$  eine Primzahl. Man zeige, dass außer 3 jeder Primteiler von  $2^p + 1$  größer als  $p$  ist. (Hinweis: Betrachte die multiplikative Ordnung von 2 modulo eines Primteilers von  $2^p + 1$ .)

(6 Punkte)