Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist. (2 Punkte)

b) Sei α eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ aus Teilaufgabe a) in einem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}_2}$ von $\mathbb{F}_2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_{16}$ gilt, dass $\alpha \in \mathbb{F}_{16}^{\times}$ gilt, und dass α ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_{16}^{\times}$ von $\mathbb{F}_{16}$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2:

Die endliche Gruppe G operiere (von links) auf der endlichen Menge X. Für jedes $\sigma \in G$ bezeichne $i(\sigma) := |\{x \in X \mid \sigma x = x\}|$ die Anzahl der Fixpunkte von σ.

Zeigen Sie, dass sich die Anzahl der Bahnen der Operation zu

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} i(\sigma)$$

berechnet.

Hinweis: Bestimmen Sie die Kardinalität der Teilmenge

$$Z := \{(\sigma, x) \in G \times X \mid \sigma x = x\} \subseteq G \times X$$

auf zwei verschiedene Arten.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.

(2 Punkte)

b) Sei K ein Körper, der eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe A_4 besitzt. Zeigen Sie, dass eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq F$ mit $[F : K] = 4$ existiert, so dass $F = K(\alpha)$ für alle $\alpha \in F \setminus K$ gilt.

(4 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei K ein endlicher Körper. Sei $a \in K$. Zeigen Sie, dass es Elemente x, $y \in K$ gibt, so dass $x^2 + y^2 = a$ gilt.

(Tipp: Wie viele Quadrate gibt es in K?) (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei S_5 die Permutationsgruppe von 5 Ziffern. Wie viele Elemente in S_5 haben die Ordnung 4? Wie viele Untergruppen von S_5 haben 4 Elemente?

(6 Punkte)