Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Aussagen sind *richtig* bzw. *falsch*? Geben Sie jeweils eine *kurze* Begründung an:

a) Die symmetrische Gruppe S_3 und die additive Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sind isomorph.

b) Die Primzerlegung von $10 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ lautet

$$10 = (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}).$$

c) Es ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{11},\mathrm{i})$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 11 \in \mathbb{Q}[X]$.

d) In $\mathbb{R}[X]$ ist (X) ein Primideal.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei G eine Gruppe der Ordnung $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Mit Syl_5 bezeichnen wir die Menge der 5-Sylowgruppen von G und mit n_5 bezeichnen wir die Mächtigkeit von Syl_5.

a) Begründen Sie, dass $n_5 \in \{1, 6\}$ gilt.

b) Begründen Sie, dass G im Fall $n_5 = 1$ nicht einfach ist.

c) Begründen Sie, dass

$$\cdot : G \times \mathrm{Syl}_5 \to \mathrm{Syl}_5\,, \ (g, P) \mapsto g\,P\,g^{-1}$$

eine transitive Operation von G auf Syl_5 ist.

d) Begründen Sie, dass G im Fall $n_5 = 6$ nicht einfach ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Kern des Homomorphismus $\lambda : G \to S_6$, der durch die Operation aus (c) gegeben ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Es sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ eine Matrix über den komplexen Zahlen, hierbei gelte $\lambda \neq 0$. Man zeige, dass für alle $k \geq 1$ die Matrix A^k die Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ hat.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Q}[X]/(X^{10} - 1)$.

a) Bestimmen Sie ein kartesisches Produkt von Körpern, das zu R isomorph ist.

Hinweis: Der chinesische Restsatz kann hilfreich sein.

b) Wie viele Ideale besitzt R?

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei $f = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$; weiter sei $a \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von f.

a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

b) Geben Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ des Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$ an.

c) Geben Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ an.

d) Geben Sie λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{Q}$ an mit

$$a^4 - 2\,a^3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot a + \lambda_3 \cdot a^2 .$$

(16 Punkte)