

Thema Nr. 3  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Geben Sie drei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 2012 konkret an und beweisen Sie, dass diese nicht isomorph sind!

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Zentralisator des  $n$ -Zyklus  $(1, 2, 3, \dots, n)$  in der symmetrischen Gruppe  $S_n$  die zyklische Gruppe  $\langle (1, 2, 3, \dots, n) \rangle$  ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei  $P(X) = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ . Es sei  $K$  der Zerfällungskörper des Polynoms  $P(X)$  in  $\mathbb{C}$  über  $\mathbb{Q}$ . Ferner sei  $\alpha \in K$  eine Nullstelle von  $P(X)$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $[K : \mathbb{Q}] = 8$  gilt, und dass es eine Nullstelle  $\beta \neq \pm\alpha$  von  $P(X)$  in  $K$  gibt, so dass  $R := \{\pm\alpha, \pm\beta\}$  die Menge aller Nullstellen von  $P(X)$  ist.
- b) Es bezeichne  $S_R$  die Gruppe der Permutationen von  $R$ . Sei  $s \in S_R$  die Permutation  $R \rightarrow R, x \mapsto -x$ . Zeigen Sie, dass die Untergruppe  $C := \{\sigma \in S_R : \sigma \circ s = s \circ \sigma\}$  Ordnung 8 hat.
- c) Es bezeichne  $G := \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  die Galoisgruppe von  $K$  über  $\mathbb{Q}$ . Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow S_R, \sigma \longmapsto (x \mapsto \sigma(x))$$

einen Gruppenisomorphismus zwischen  $G$  und  $C$  induziert.

- d) Ist  $G$  auflösbar?

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Wie viele Lösungen hat die Gleichung  $X^2 + 46X + 1 \equiv 0$  in  $\mathbb{Z}/2012\mathbb{Z}$ ? (503 ist eine Primzahl.)

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Zerlegen Sie das Polynom  $X^5 - 7X^3 + 503X^2 + 12X - 2012$  in  $\mathbb{Q}[X]$  in irreduzible Faktoren!

(5 Punkte)