Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Seien n, $m > 0$ natürliche Zahlen. Mit $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge der $(n \times m)$-Matrizen mit rationalen Einträgen. Seien $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ die allgemeinen linearen Gruppen in den Dimensionen n und m über $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})) \times \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}), \quad ((S,T),A) \mapsto S \cdot A \cdot T^{-1}$$

auf $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q})$ operiert, aber nicht effektiv. (Dabei heißt eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ einer Gruppe G auf einer Menge X *effektiv*, wenn aus $\forall x \in X\colon g \cdot x = x$ für ein Gruppenelement $g \in G$ schon $g = 1$ folgt.)

nicht kursiv

b) Zeigen Sie, dass diese Operation genau $r + 1$ Bahnen besitzt, dabei ist $r := min(m, n)$.
(Tipp: Verwenden Sie den Rang einer Matrix.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ keine mehrfachen Nullstellen in den komplexen Zahlen besitzt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien p eine Primzahl und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Sei $R = \mathbb{Z}[\zeta]$ der von ζ erzeugte Unterring von $\mathbb{C}$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}/\left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\right) \to R/(a-\zeta), n + \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\right) \mapsto n + (a - \zeta)$$

Abstand

ein wohldefinierter Ringisomorphismus ist und folgern Sie daraus, dass $2 - \zeta$ genau dann ein Primelement in R ist, wenn $2^p - 1$ eine Primzahl ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl. Sei K ein Körper der Charakteristik 0.

a) Sei E eine (endliche) galoissche Körpererweiterung von K. Zeigen Sie, dass E/K einen Zwischenkörper F/K besitzt, so dass der Grad $[E : F]$ eine p-Potenz ist und der Grad $[F : K]$ nicht von p geteilt wird. (Die Zahl 1 ist eine p-Potenz für jede Primzahl p.)

b) Besitze K die Eigenschaft, dass der Grad $[L : K]$ jeder nicht trivialen endlichen Körpererweiterung L/K von p geteilt wird. Zeigen Sie, dass dann der Grad einer jeden endlichen Körpererweiterung über K eine p-Potenz ist.

Fortsetzung nächste Seite!

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei p eine Primzahl. Für jede nicht verschwindende ganze Zahl a sei $\nu_p(a)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von a (also insbesondere genau dann 0, falls p kein Teiler von a ist). Ist b eine weitere nicht verschwindende ganze Zahl, so definieren wir $\nu_p(\frac{a}{b}) := \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

a) Sei $\frac{a}{b}$ ein vollständig gekürzter Bruch mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $\frac{2\pi}{b}$ aus dem Winkel $\frac{2\pi a}{b}$ nur mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

b) Sei $r \in \mathbb{Q}^\times$ eine nicht verschwindende rationale Zahl. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $2\pi r$ genau dann mit Zirkel und Lineal dritteln läßt, wenn $\nu_3(r) \geq 0$ gilt.

(6 Punkte)