Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $n \geq 5$. Man bestimme alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_n. Dabei darf (und sollte) ohne Beweis benutzt werden, dass für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe A_n einfach ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $b_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]$. Ferner setze $b_0(X) = 1$. Man zeige:

a) $b_k(m) \in \mathbb{Z}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

b) Die Polynome $b_k(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$, bilden eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[X]$.

c) Das Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ nehme an allen ganzzahligen Stellen ganzzahlige Werte an. Man zeige, dass $f(X)$ eine ganzzahlige Linearkombination der Polynome $b_k(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist.

(9 Punkte)

Aufgabe 3:
Die Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ positiver reeller Zahlen sei durch $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ $(n \geq 0)$ definiert. Man zeige $[\mathbb{Q}(a_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweisen Sie, dass es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ $(n \geq 1)$ gibt, die jeweils durch eine Quadratzahl > 1 teilbar sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 5:
Untersuchen Sie die folgenden Polynome auf Irreduzibilität. Hierbei ist $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit 2 Elementen.

a) $X^5 + X^2 + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$

b) $X^5 + X^2Y^3 + X^3 + Y^3 + X^2 + 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$

(6 Punkte)