Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei p eine Primzahl und S_p die symmetrische Gruppe vom Grad p.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p.

b) Zeigen Sie: Die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von S_p beträgt $(p-2)!$

c) Folgern Sie aus (a) die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$. (9 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und p eine ungerade Primzahl. Betrachten Sie das Polynom $f = X^n + X + p \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie: Ist α eine komplexe Nullstelle von f, so gilt $|\alpha| > 1$.

b) Zeigen Sie: f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.(Hinweis: Stellen Sie hierzu Überlegungen zu Nullstellen von potentiellen Faktoren an). (6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei F ein unendlicher Körper und $f \in F[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom in n Variablen. Zeigen Sie: Ist $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $a_1, \ldots, a_n \in F$, so ist f das Nullpolynom. (Hinweis: Induktion). (8 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei F_n die Fibonaccifolge, die durch

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

definiert ist.

a) Zeigen Sie: $F_n \equiv 2n3^n \ (\mathrm{mod}\ 5)$

b) Ist $F_{2011} + 1$ durch 5 teilbar? Begründen Sie Ihre Antwort! (7 Punkte)