Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt $x^2 = 1$ für alle Elemente x der Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G heißt maximal, wenn G die einzige Untergruppe von G ist, die U echt enthält.
Zeigen Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 4$: Jede maximale Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n hat eine Ordnung $\geq n$.
(Tipp: Man unterscheide die Fälle, in denen eine maximale Untergruppe von S_n transitiv bzw. nicht transitiv operiert.)

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ einer Gruppe G sei zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Für $1 \leq m \in \mathbb{N}$ betrachte man das Polynom $f_m(X) = X^{2m} + X^m + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:

a) Jede komplexe Nullstelle von f_m ist eine Einheitswurzel.

b) f_m ist genau dann irreduzibel über $\mathbb{Q}$, wenn $m = 3^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ eine ganzzahlige $n \times n$–Matrix mit $A^p = E$ für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\det(A - E)$ ganzzahlig und durch p teilbar ist. (E bezeichnet die Einheitsmatrix.)

(6 Punkte)