Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei I das von einer Primzahl p und X im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[X]$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2:

Eine echte Untergruppe U einer Gruppe G heiße maximal, wenn für jede Untergruppe V von G mit $U \subset V \subset G$ gilt $V = U$ oder $V = G$. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie: G enthält dann und nur dann genau zwei (verschiedene) maximale Untergruppen, wenn G zu $\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q^b\mathbb{Z}$ isomorph ist mit verschiedenen Primzahlen p, q und $1 \leq a, b \in \mathbb{N}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei S_n die symmetrische Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und p eine Primzahl mit $p \leq n < p^2$. Zeigen Sie, dass jede p-Sylowuntergruppe von S_n abelsch ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Im Polynomring $\mathbb{Q}[X,Y]$ in den Variablen X, Y über $\mathbb{Q}$ sei I das von $X^3 - 7$ und $(X+Y)^2 + (X+Y) + 1$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}[X,Y]/I =: K$ ist ein Körper.

b) K enthält genau eine quadratische Erweiterung L von $\mathbb{Q}$.

(Hinweis: $K \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \zeta_3), \zeta_3$ primitive 3–te Einheitswurzel). (6 Punkte)