

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

R sei ein endlicher kommutativer Ring. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt mit $r^n = 1$.
- b) $r \in R$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt mit $r^n = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

G sei eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$, und P_n bezeichne die von der Menge $\{g^n; g \in G\}$ erzeugte Untergruppe in G . Zeigen Sie:

- a) P_n ist ein Normalteiler in G .
- b) Für jeden Normalteiler N in G gilt: Es ist $P_n \subseteq N$ genau dann, wenn $y^n = 1$ für alle Nebenklassen $y \in G/N$ ist.
- c) Die Kommutatorgruppe G' von G ist Untergruppe von P_2 .

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

G bezeichne eine Gruppe der Ordnung p^2q , wobei p und q Primzahlen mit $p < q$ sind. Zeigen Sie:

- a) Ist G einfach, so folgt mit dem Satz von Sylow: $q = p + 1$.
- b) G ist nicht einfach.
- c) Frage: Ist G auch dann nicht einfach, wenn $p = q$ ist?

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

p sei eine Primzahl, $\alpha := \sqrt[p]{2} \in \mathbb{R}$ und $\zeta := e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$.

- a) Zeigen Sie, dass der Grad von α über \mathbb{Q} gleich p ist, und geben Sie das Minimalpolynom P von α über \mathbb{Q} an.
- b) Zeigen Sie, dass $L := \mathbb{Q}[\alpha, \zeta]$ der Zerfällungskörper von P ist. Geben Sie den Grad von ζ über \mathbb{Q} an und beweisen Sie:

$$[L : \mathbb{Q}] = p(p-1).$$

- c) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe der Erweiterung $L | \mathbb{Q}$ isomorph ist zur Gruppe der bijektiven Abbildungen

$$\tau_{a,b} : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p, \quad \tau_{a,b}(x) := ax + b \quad (a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p)$$

des Körpers \mathbb{F}_p .

(8 Punkte)