Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und multiplikativer Gruppe $\mathbb{F}_p^*$.

a) Sei $p > 2$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i) -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.
   ii) Das Polynom $X^2 + 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$.
   iii) In $\mathbb{F}_p^*$ gibt es ein Element der Ordnung 4.
   iv) $p \equiv 1 \mod 4$.

b) Sei $p > 3$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i) -3 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$.
   ii) Das Polynom $X^2 + X + 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$.
   iii) In $\mathbb{F}_p^*$ gibt es ein Element der Ordnung 3.
   iv) $p \equiv 1 \mod 3$.

(7 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei G eine endliche Gruppe.

a) Sei $Z(G)$ das Zentrum von G. Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

b) Es operiere G transitiv auf einer Menge M mit $|M| > 2$. Zeigen Sie, dass es ein $g \in G$ gibt mit $gm \neq m$ für alle $m \in M$.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $P(T) := T^4 + 1 \in \mathbb{Z}[T]$.

a) Zerlegen Sie P im Ring $\mathbb{R}[T]$ in irreduzible Faktoren.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von P. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ eine abelsche Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist und geben Sie den Isomorphie-Typ ihrer Galoisgruppe an.

c) Geben Sie alle Teilkörper $E \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $[E : \mathbb{Q}] = 2$ explizit als $E = \mathbb{Q}(\beta)$ an.

(8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p[X]$ der Ring der Polynome mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.

a) Sei $\tau : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p[X]$ der durch $X \longmapsto X+1$ gegebene Ringisomorphismus. Zeigen Sie, dass τ die Ordnung p hat und dass jedes nicht konstante τ-invariante Polynom aus $\mathbb{F}_p[X]$ mindestens den Grad p hat.

b) Zeigen Sie, dass $X^p - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist (etwa durch Operation von τ auf einer Primfaktorzerlegung von $X^p - X - 1$).

(8 Punkte)