Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl. Man gebe eine nicht kommutative Gruppe der Ordnung p^3 an. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist n ein Teiler von
$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$? (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\Phi_d(X) \in \mathbb{Z}[X]$ das d-te Kreisteilungspolynom. Ferner seien $n \geq 1$ und z ganze Zahlen.
Zeigen Sie:
Ist p Primzahl mit $p \nmid n$, so gilt

$$p \mid \Phi_n(z) \Longrightarrow \begin{cases} z^n \equiv 1 \bmod p \\ \text{und} \\ z^d \not\equiv 1 \bmod p \text{ für alle } d \mid n, 1 \leq d < n \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein separables Polynom der Form $f(X) = h(X^2)$ für ein $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $n \geq 2$ der Grad von h. Man zeige, dass die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ isomorph zu einer echten Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_{2n} ist. (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Beweisen Sie:
Jede Abbildung $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ lässt sich als polynomiale Abbildung $x \mapsto f(x)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{F}_q[X]$ vom Grade höchstens $q-1$ darstellen. (6 Punkte)