Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:
Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Für jede natürliche Zahl n ist $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ganzzahlig durch 13 teilbar.

b) Sind m und n je Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen, so ist auch ihr Produkt mn Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

c) Sind m und n je Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen, so ist auch ihr Produkt mn Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen.

(Beachten Sie, dass auch 0 Quadrat einer ganzen Zahl ist.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für eine endliche Gruppe $G \neq \{e\}$ folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

a) G ist zyklisch von Primzahlpotenzordnung.

b) G besitzt genau eine maximale Untergruppe.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei R ein Integritätsring, und M bezeichne die Vereinigung aller maximalen Ideale in R. Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe R^* von R gilt:

$$R^* = R \backslash M.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweisen oder widerlegen Sie:
Sind $L|K$ und $M|L$ Galoiserweiterungen, beide vom Grade 2, und ist $M|K$ galoissch, so ist die Galoisgruppe von $M|K$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
Beweisen Sie:

a) $f(X) | f(X^2 - 2)$.

b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) \,|\, \mathbb{Q}$ ist galoissch.

c) Die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\alpha) \,|\, \mathbb{Q}$ ist zyklisch von der Ordnung 3.

(6 Punkte)