Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

a) Seien p und q natürliche Zahlen. Zeigen Sie: Es gibt nur endlich viele rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, die die Ungleichung $|\frac{p}{q} - \frac{x}{y}| < \frac{1}{y^2}$ erfüllen.

b) Geben Sie eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung $x^2 - 13y^2 = -1$ an.

c) Wie erhält man aus einer Lösung in b) eine Einheit im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$?

d) Zeigen Sie, dass es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ gibt, die die Ungleichung $|\sqrt{13} - \frac{x}{y}| < \frac{1}{4y^2}$ erfüllen.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es seien p und q Primzahlen mit $p < q$.

a) Zeigen Sie mit den Sylowschen Aussagen, dass im Fall $q \not\equiv 1 \bmod p$ jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

b) Geben Sie im Falle $q \equiv 1 \bmod p$ mit Hilfe des semidirekten Produktes eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq an.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien m, n quadratfreie ganze Zahlen. Zeigen Sie: Sind die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ isomorph, dann ist $m = n$. (7 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei p Primzahl, K der Primkörper mit p Elementen und m eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Jedes Kreisteilungspolynom $\Phi_m \in K[X]$ mit $p \nmid m$ ist Produkt von irreduziblen Polynomen gleichen Grades k, wobei k der kleinste Teiler von $\varphi(m)$ ist, so dass $m \mid p^k - 1$. (8 Punkte)