Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei $X = X_1 \cup X_2$ eine endliche Menge, die disjunkte Vereinigung zweier n-elementiger Mengen X_1 und X_2 ist, $(n \geq 2)$. Sei $S(X) \cong S_{2n}$ die Menge aller Permutationen von X (d.h. aller bijektiven Abbildungen $\sigma : X \to X$). Die Untermenge $G \subset S(X)$ sei wie folgt definiert:

$$G := \{\sigma \in S(X) : \sigma(X_1) = X_1 \text{ oder } \sigma(X_1) = X_2\}.$$

a) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $S(X)$ ist.

b) Sei $\varphi : G \to \{\pm 1\}$ definiert durch

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(X_1) = X_1, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus ist und $\operatorname{Ker}(\varphi)$ isomorph zu $S_n \times S_n$ ist.

c) Ist G ein Normalteiler von $S(X)$?

d) Für welche n ist die Gruppe G auflösbar?

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei K ein Integritätsring, der einen Körper k enthält. Die Dimension von K über k sei endlich.

a) Beweisen Sie, dass K selbst ein Körper ist.

b) Sei $x \neq 0$ ein Element von K über k mit Minimalpolynom

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n \in k[X].$$

Drücken Sie $y := 1/x$ als ein Polynom in x aus und bestimmen Sie das Minimalpolynom von y.

(7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie, dass das Polynom

$$F(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

irreduzibel ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Polynom modulo 3.

b) Sei

$$K := \mathbb{Q}[X]/(F(X))$$

und $\vartheta \in K$ eine Nullstelle von $F(X)$. Beweisen Sie: Es gibt einen Automorphismus $\sigma : K \to K$ mit

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}.$$

c) Sei $K_0 \subset K$ der Fixkörper von σ. Zeigen Sie, dass K_0 über $\mathbb{Q}$ von

$$\alpha := \vartheta + \frac{1}{\vartheta}$$

erzeugt wird und bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ϑ über K_0.

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei R der Ring

$$R := \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}.$$

a) Bestimmen Sie alle Ideale von R. Welche davon sind Primideale?

b) Zeigen Sie: Es gibt surjektive Ringhomomorphismen von R auf $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_{11}$, aber keinen von R auf $\mathbb{F}_9$.

c) Für eine ganze Zahl $k \geq 1$ sei

$$G_k := \{x \in R : x^k = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass G_k eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe R^* der invertierbaren Elemente von R ist und bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von G_k in Abhängigkeit von k.

(7 Punkte)